

# HUTAN DAN SIKEL PADA GRAF FUZZY

Aisyah Afidah Arifai<sup>1</sup>, Dwi Juniati<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Surabaya, 60231

<sup>2</sup> Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas negeri Surabaya, 60231

email : [aisaisyah17@yahoo.com](mailto:aisaisyah17@yahoo.com)<sup>1</sup>, [dwi\\_juniati@yahoo.com](mailto:dwi_juniati@yahoo.com)<sup>2</sup>

## ABSTRAK

Graf fuzzy merupakan suatu teori perluasan dari teori graf dan himpunan fuzzy. Pada skripsi ini akan dipelajari hutan dan siklus pada graf fuzzy. Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah hutan fuzzy jika terdapat subgraf fuzzy yang merentang yaitu  $F = (\mu, \tau)$  yang merupakan hutan, dimana untuk sisi  $xy$  yang tidak berada di  $F$ , berlaku  $\rho(xy) < \tau^\infty(x, y)$ . Akan dibuktikan  $G$  adalah hutan fuzzy jika dan hanya jika pada sebarang siklus di  $G$ , terdapat sisi  $xy$  sedemikian hingga  $\rho(xy) < \rho^\infty(x, y)$ , dimana  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang diperoleh dengan menghapus sisi  $xy$  dari  $G$ . Jika terdapat paling sedikit satu lintasan kuat diantara sebarang dua titik di  $G$ , maka  $G$  harus sebuah hutan fuzzy. Jika  $G$  hutan fuzzy, maka sisi pada  $F$  adalah jembatan pada  $G$ .  $(\mu, \rho)$  adalah siklus fuzzy jika dan hanya jika  $(\text{supp}(\mu), \text{supp}(\rho))$  adalah siklus dan tidak terdapat dengan tunggal  $xy \in \text{supp}(\rho)$  sedemikian hingga  $\rho(xy) = \bigwedge \{ \rho(uv) \mid uv \in \text{supp}(\rho) \}$ .  $(\mu, \rho)$  adalah siklus fuzzy jika dan hanya jika  $(\mu, \rho)$  bukan pohon fuzzy.

**Kata kunci :** graf fuzzy, hutan fuzzy, siklus fuzzy, pohon fuzzy

## PENDAHULUAN

Graf fuzzy merupakan suatu teori perluasan dari teori graf dan himpunan fuzzy. Graf fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1975. Misalkan  $V$  himpunan titik berhingga dan tidak kosong, suatu graf fuzzy yang dinotasikan dengan  $G = (V, \mu, \rho)$  atau disingkat  $G = (\mu, \rho)$  dengan  $\mu : V \rightarrow [0, 1]$  dan  $\rho : V \times V \rightarrow [0, 1]$  yang memenuhi  $\rho(xy) \leq \mu(x) \wedge \mu(y), \forall x, y \in V$ , dimana  $\mu$  disebut himpunan titik fuzzy dan  $\rho$  disebut himpunan sisi fuzzy, dan  $\wedge$  menyatakan operasi minimal. Salah satu hal yang menarik pada graf fuzzy adalah mengenai hutan dan siklus. Pada artikel ini akan dibahas sifat-sifat hutan dan siklus pada graf fuzzy.

## KAJIAN TEORI

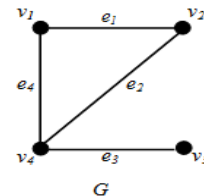
### 2.1 Teori Graf

#### Definisi 2.1.1

Sebuah graf  $G$  berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong)  $E(G)$  yang elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik  $V(G)$ .  $V(G)$  disebut himpunan titik dari graf  $G$  dan  $E(G)$  disebut himpunan sisi dari graf  $G$ .

Sebuah graf  $G$  dapat di presentasikan dengan diagram, dimana setiap titik di  $G$  digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di  $G$  digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut.

#### Contoh 2.1.1



Gambar 2.1 : Graf  $G$  dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  dimana  $e_1$  adalah sisi yang menghubungkan titik  $v_1$  dan  $v_2$ ,  $e_2$  adalah sisi yang menghubungkan titik  $v_2$  dan  $v_4$ ,  $e_3$  adalah sisi yang menghubungkan titik  $v_3$  dan  $v_4$ ,  $e_4$  adalah sisi yang menghubungkan titik  $v_1$  dan  $v_3$

#### Definisi 2.1.2

Sebuah sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelang (*loop*).

Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi rangkap.

Sebuah graf  $G$  adalah graf sederhana jika graf tersebut tidak memiliki gelung dan tidak memiliki sisi rangkap.

#### Definisi 2.1.3

Sebuah graf  $H$  disebut subgraf dari graf  $G$ , ditulis  $H \subseteq G$ , jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Jika  $H \subseteq G$  dan  $V(H) = V(G)$ , maka  $H$  disebut subgraf rentang dari  $G$ . Misal  $V \subset V(G)$ , subgraf yang dibangun (diinduksi) oleh  $V$  dilambangkan dengan  $G[V]$  adalah sebuah subgraf dari  $G$  yang himpunan titiknya adalah  $V$  dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi  $G$  yang mempunyai titik-titik akhir di  $V$ .

#### Definisi 2.1.4

Misalkan  $G$  adalah sebuah graf. Sebuah jalan pada sebuah graf  $G$  adalah barisan titik dan sisi graf silih berganti sedemikian hingga titik  $v_{i-1}$  dan  $v_i$  adalah ujung dari sisi  $e_i$ , dimana  $1 \leq i \leq k$ . Misal jalan  $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{i-1}, e_i, v_i, \dots, e_k, v_k)$ .  $v_0$  adalah titik awal dari jalan  $W$ ,  $v_k$  adalah titik akhir dari jalan  $W$ , sedangkan titik yang lain dari jalan  $W$  disebut titik internal. Panjang jalan  $W$  adalah banyaknya sisi pada  $W$ . Jalan buka adalah jalan yang titik awal dan akhirnya berbeda. Jalan tutup adalah jalan yang titik awal dan akhirnya sama (identik). Sebuah jejak pada graf  $G$  adalah jalan yang semua sisinya berbeda. Jejak buka adalah jalan buka yang semua sisinya berbeda. Jejak tutup adalah jalan tutup yang semua sisinya berbeda. Jejak tutup juga disebut sirkuit. Sebuah lintasan pada graf  $G$  adalah jejak yang semua titiknya berbeda. Sebuah siklus pada graf  $G$  adalah sirkuit (jejak tutup) yang semua titik awal dan titik internalnya berbeda.

#### Definisi 2.1.5

Sebuah graf  $G$  dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika syarat tersebut tidak dipenuhi maka graf  $G$  adalah graf tak terhubung. Sebuah komponen graf  $G$  adalah subgraf terhubung maksimal (titik dan sisi) dari  $G$ . Setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen sedangkan graf tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen.

#### Definisi 2.1.6

Misal  $G$  sebuah graf. Sisi  $e \in E(G)$  disebut jembatan jika komponen graf  $G - e$  lebih banyak dari komponen graf  $G$ .

#### Definisi 2.1.7

Misal  $G$  sebuah graf. Titik  $v \in V(G)$  disebut titik pemutus jika komponen graf  $G - v$  lebih banyak dari komponen graf  $G$ .

#### Definisi 2.1.8

Sebuah graf disebut hutan jika graf tersebut tidak memiliki siklus. Sebuah graf disebut pohon jika graf tersebut adalah graf terhubung dan tidak memiliki siklus.

## 2.2 Himpunan Fuzzy

#### Definisi 2.2.1

Misal  $X$  adalah himpunan tak kosong maka himpunan fuzzy  $A$  di  $X$  didefinisikan :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

dimana  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$  adalah fungsi keanggotaan  $X$ . Selanjutnya  $\mu_A(x)$  disebut derajat keanggotaan dari  $x$ . Jika  $\mu_A(x) = 0$ , boleh tidak ditulis dan jika  $\mu_A(x) = 0, \forall x \in X$  maka  $A$  disebut himpunan fuzzy nol.

#### Definisi 2.2.2

*Support* dari himpunan fuzzy  $A$  dengan himpunan semesta  $X$  dinotasikan dengan  $\text{supp}(A)$  adalah himpunan yang memuat seluruh anggota  $X$  yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol di  $A$ .

$$\text{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$$

#### Definisi 2.2.3

Diberikan himpunan fuzzy  $A$  dalam semesta  $X$  dan sebarang  $t \in [0,1]$  maka himpunan potongan- $t$  yang dinotasikan dengan  $A'$  didefinisikan :

$$A' = \{x \in X | \mu_A(x) \geq t\}$$

#### Definisi 2.2.4

Misal  $A$  dan  $B$  adalah dua himpunan fuzzy di  $X$ .

- 1)  $A = B$  jika dan hanya jika  $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$ .
- 2)  $A \subseteq B$  jika dan hanya jika  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$ .

#### Definisi 2.2.5

Misal  $A$  dan  $B$  adalah dua himpunan fuzzy di  $X$ .

- 1) Gabungan dari himpunan fuzzy  $A$  dan  $B$  didefinisikan :

$$A \vee B = \{(x, \mu_{(A \vee B)}(x))\}, \forall x \in X$$

dengan

$$\mu_{(A \vee B)}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

- 2) Irisan dari himpunan fuzzy  $A$  dan  $B$  didefinisikan :

$$A \wedge B = \{(x, \mu_{(A \wedge B)}(x))\}, \forall x \in X$$

dengan

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

### Definisi 2.2.6

Relasi pada himpunan fuzzy adalah relasi  $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$  beserta fungsi  $\mu_R$  dimana  $\mu_R : R \rightarrow [0,1]$ .

Selanjutnya  $\mu_R((x_1, x_2, \dots, x_n))$  disebut derajat keanggotaan dari  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan fungsi  $\mu_R$  disebut fungsi keanggotaan dari  $R$ . Jika  $n = 2$ , maka  $R$  disebut relasi biner fuzzy.

### Definisi 2.2.7

Komposisi dari relasi biner fuzzy  $P(X,Y)$  dan  $Q(Y,Z)$  dinotasikan dengan  $P \circ Q$  merupakan relasi biner fuzzy  $R(X,Z)$  pada  $X \times Z$  dengan fungsi keanggotaannya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mu_{P \circ Q}(x, z) &= \mu_{P \circ Q}(x, z) \\ &= \max_{y \in Y} \min[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \\ &\quad \forall x \in X, z \in Z. \end{aligned}$$

## PEMBAHASAN

### 3.1 Pengertian Graf Fuzzy

#### Definisi 3.1.1

Misalkan  $V$  himpunan berhingga titik dan tidak kosong. Suatu graf fuzzy yang dinotasikan dengan  $G = (V, \mu, \rho)$  atau disingkat  $G = (\mu, \rho)$  dengan

- $\mu : V \rightarrow [0,1]$
- $\rho : V \times V \rightarrow [0,1]$   
yang memenuhi  $\rho(xy) \leq \mu(x) \wedge \mu(y), \forall x, y \in V$ , dimana  $\mu$  disebut himpunan titik fuzzy,  $\rho$  disebut himpunan sisi fuzzy, dan  $\wedge$  menyatakan operasi minimal dari  $\mu(x)$  dan  $\mu(y)$ .

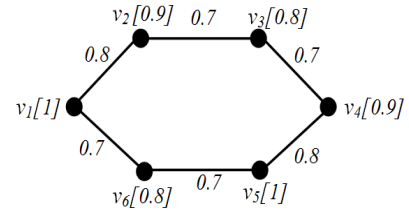
Catatan : Dalam menggambarkan graf fuzzy, jika derajat keanggotaan bernilai nol maka titik maupun sisi pada graf fuzzy tersebut tidak digambarkan.

#### Contoh 3.1.1

Misalkan  $G = (\mu, \rho)$  graf fuzzy dengan  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ . Himpunan titik fuzzy dan himpunan sisi fuzzynya adalah sebagai berikut :

- $\mu : V \rightarrow [0,1]$ , dengan  $\mu(v_1) = 1, \mu(v_2) = 0.9, \mu(v_3) = 0.8, \mu(v_4) = 0.9, \mu(v_5) = 1, \mu(v_6) = 0.8$ .
- $\rho : V \times V \rightarrow [0,1]$ , dengan  $\rho(v_1v_2) = 0.8, \rho(v_2v_3) = 0.7, \rho(v_3v_4) = 0.7, \rho(v_4v_5) = 0.8, \rho(v_5v_6) = 0.7, \rho(v_1v_6) = 0.7$ .

Maka graf fuzzy  $G$  tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 : Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$

### Definisi 3.1.2

Graf fuzzy  $H = (v, \tau)$  disebut subgraf fuzzy dari graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  jika

- $v(x) \leq \mu(x), \forall x \in V$  atau dapat ditulis  $v \leq \mu$ .
- $\tau(xy) \leq \rho(xy), \forall xy \in V \times V$  atau dapat ditulis  $\tau \leq \rho$ .

### Definisi 3.1.3

Graf fuzzy  $H = (V^*, v, \tau)$  disebut subgraf fuzzy dari graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  yang diinduksi oleh  $V^*$  jika  $V^* \subseteq V$ .  $v(x) = \mu(x), \forall x \in V^*$  dan  $\tau(xy) = \rho(xy), \forall x, y \in V^*$ . Digunakan notasi  $\langle V^* \rangle$  untuk menunjukkan subgraf fuzzy dari  $G$  yang diinduksi oleh  $V^*$ .

### Definisi 3.1.4

Diberikan graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  dan sebarang  $t \in [0,1]$ . Maka  $(\mu^t, \rho^t)$  adalah graf fuzzy yang diinduksi oleh  $t$  dengan :

- $\mu^t : V \rightarrow [0,1]$ , dimana  $\forall x \in V$  berlaku  

$$\mu^t(x) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } \mu(x) < t \\ \mu(x) & , \text{jika } \mu(x) \geq t \end{cases}$$
- $\rho^t : V \times V \rightarrow [0,1]$ , dimana  $\forall xy \in V \times V$  berlaku  

$$\rho^t(xy) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } \rho(xy) < t \\ \rho(xy) & , \text{jika } \rho(xy) \geq t \end{cases}$$

### Proposisi 3.1.1

Misalkan  $G = (\mu, \rho)$  sebuah graf fuzzy. Jika  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , maka graf fuzzy  $(\mu^t, \rho^t)$  adalah subgraf fuzzy dari graf fuzzy  $(\mu^s, \rho^s)$ .

### Proposisi 3.1.2

Misalkan  $H = (v, \tau)$  adalah subgraf fuzzy dari  $G = (\mu, \rho)$ . Untuk sebarang  $t \in [0,1]$ ,  $(v^t, \tau^t)$  adalah subgraf fuzzy dari  $(\mu^t, \rho^t)$ .

### Definisi 3.1.5

Subgraf fuzzy  $H = (v, \tau)$  merentang pada  $G = (\mu, \rho)$  jika  $\mu(x) = v(x), \forall x \in V$ .

### Definisi 3.1.6

Sebuah lintasan pada graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah rangkaian titik-titik yang berbeda  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , sehingga untuk semua  $v_{i-1}v_i$ ,  $\rho(v_{i-1}v_i) > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pasangan terurut  $v_{i-1}v_i$  disebut sisi dari lintasan.

Panjang lintasan adalah banyaknya pasangan titik yang termuat di dalam lintasan. Kekuatan dari sebuah lintasan didefinisikan sebagai  $\bigwedge_i^n \rho(v_{i-1}v_i)$ .

### Definisi 3.1.7

Misal  $G = (\mu, \rho)$  adalah graf terhubung. Diameter  $x, y \in V$  dinotasikan dengan  $diam(x, y)$  adalah panjang lintasan terpanjang yang menghubungkan  $x$  ke  $y$ . Kekuatan keterhubungan diantara dua titik  $x, y$  pada graf fuzzy adalah  $\rho^\infty(x, y)$ .

Jika  $diam(x, y) = 1$ , maka  $\rho^\infty(x, y) = \rho(xy)$ .

Jika  $diam(x, y) = k$ , maka  $\rho^\infty(x, y) = \bigvee \{\rho^i(x, y) | i = 1, 2, \dots, k\}$  dengan  $\rho^i(x, y) = \bigvee \{\rho(xx_1) \wedge \rho(x_1x_2) \wedge \dots \wedge \rho(x_{i-1}y) | x_1, \dots, x_{i-1} \in V\}$ . Lintasan terkuat yang menghubungkan dua titik  $x$  dan  $y$  adalah lintasan yang mempunyai kekuatan  $\rho^\infty(x, y)$ .

### Definisi 3.1.8

Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  dikatakan terhubung jika  $\forall x, y \in \text{supp}(\mu)$ ,  $\rho^\infty(x, y) > 0$ . Komponen terhubung adalah subgraf fuzzy yang terhubung dimana tidak ada subgraf fuzzy lain dari  $G = (\mu, \rho)$  yang terhubung dan memuat komponen tersebut.

### Proposisi 3.1.3

Jika  $H = (v, \tau)$  adalah subgraf fuzzy dari  $G = (\mu, \rho)$ , maka  $\tau^\infty \leq \rho^\infty$ .

### Definisi 3.1.9

Misalkan  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy dari  $G = (\mu, \rho)$  yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$  di  $G = (\mu, \rho)$ . Sisi  $xy$  dikatakan jembatan di  $G$  jika  $\rho'^\infty(u, v) < \rho^\infty(u, v)$  untuk suatu titik  $u, v$ .

### Teorema 3.1.1

Pernyataan-pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen :

- (1)  $xy$  adalah jembatan;
- (2)  $\rho'^\infty(x, y) < \rho^\infty(x, y)$ ;
- (3)  $xy$  bukan sisi terlemah dari sebarang siklus.

### Bukti :

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Andaikan  $xy$  bukan jembatan. Maka berdasarkan Definisi 3.1.9 berlaku,

$$\rho'^\infty(x, y) \geq \rho^\infty(x, y) \quad \dots\dots\dots(*)$$

Berdasarkan Definisi 3.1.7,

$$\rho^\infty(x, y) \geq \rho(xy) \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (\*) dan (\*\*) diperoleh,

$$\rho'^\infty(x, y) \geq \rho(xy).$$

Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Maka  $xy$  adalah jembatan. ■

(3)  $\Rightarrow$  (2)

Andaikan  $\rho'^\infty(x, y) \geq \rho(xy)$ . Misal  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$ . Terdapat lintasan  $P$  yang tidak memerlukan sisi  $xy$  dimana kekuatannya  $\geq \rho(xy)$ . Sehingga lintasan  $P$  tersebut dan sisi  $xy$  akan membentuk sebuah siklus sedemikian hingga sisi  $xy$  merupakan sisi terlemah. Hal ini kontradiksi. Maka  $\rho'^\infty(x, y) < \rho(xy)$ . ■

(1)  $\Rightarrow$  (3)

Andaikan  $xy$  sisi terlemah dari sebarang siklus. Misal  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$  maka terdapat sebuah lintasan dari  $x$  ke  $y$  pada  $G'$  yang memiliki sifat

$$\rho'^\infty(x, y) \geq \rho(xy) \quad \dots\dots\dots(*)$$

Berdasarkan Definisi 3.1.7, diperoleh

$$\rho^\infty(x, y) \geq \rho(xy) \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (\*) dan (\*\*), maka berlaku

$$\rho'^\infty(x, y) \geq \rho^\infty(x, y)$$

Hal ini kontradiksi. Maka  $xy$  bukan sisi terlemah dari sebarang siklus. ■

### Definisi 3.1.10

Misalkan  $G' = (\mu', \rho')$  adalah subgraf fuzzy dari  $G$  yang didapat dengan menghapus titik  $w$ .  $w$  dikatakan titik pemutus di  $G$  jika  $\rho'^\infty(u, v) < \rho^\infty(u, v)$  untuk suatu titik  $u, v$  sehingga  $u \neq w \neq v$ .

## 3.2 Hutan dan Pohon Pada Graf Fuzzy

### Definisi 3.2.1

Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah hutan fuzzy jika terdapat subgraf fuzzy perentang yaitu  $F = (\mu, \tau)$  yang merupakan hutan, dimana untuk sisi  $xy$  yang tidak berada di  $F$ , berlaku  $\rho(xy) < \tau^\infty(x, y)$ .

### Definisi 3.2.2

Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah pohon fuzzy jika  $G$  terhubung dan terdapat subgraf fuzzy perentang yaitu  $F = (\mu, \tau)$  yang juga terhubung.

### Teorema 3.2.1

$G$  adalah hutan fuzzy jika dan hanya jika pada sebarang siklus di  $G$ , terdapat sisi  $xy$  sedemikian hingga  $\rho(xy) < \rho'^\infty(x, y)$ , dengan  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang diperoleh dengan menghapus sisi  $xy$  dari  $G$ .

**Bukti :**

⇒

$G = (\mu, \rho)$  adalah hutan fuzzy maka terdapat subgraf fuzzy yang merentang pada  $G$  yaitu  $F = (\mu, \tau)$  dimana  $F$  adalah sebuah hutan. Misal  $C$  adalah siklus pada  $G$ . Maka terdapat sisi pada  $C$  yang tidak berada di  $F$  misalkan sisi  $xy$ . Sehingga untuk sisi  $xy$  yang tidak berada di  $F$  berlaku

$$\rho(xy) < \tau^\infty(x, y) \quad \dots\dots\dots(*)$$

Misal terdapat  $G' = (\mu, \rho')$ , dimana  $G'$  didapat dari menghapus sisi  $xy$  maka berlaku

$$\tau^\infty(x, y) \leq \rho'^\infty(x, y) \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (\*) dan (\*\*), maka didapat  $\rho(xy) < \rho'^\infty(x, y)$ . Sehingga terdapat sisi  $xy$  pada siklus di  $G$  yang mempunyai sifat  $\rho(xy) < \rho'^\infty(x, y)$ . ■

**Proposisi 3.2.1**

Jika terdapat paling sedikit satu lintasan kuat diantara sebarang dua titik di  $G$ , maka  $G$  harus sebuah hutan fuzzy.

**Bukti :**

Andaikan  $G$  bukan hutan fuzzy. Misal  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$ . Berdasarkan Teorema 3.2.1, terdapat sebuah siklus  $C$  di  $G$  sehingga  $\forall xy$  di  $C$  sedemikian hingga berlaku  $\rho(xy) \geq \rho'^\infty(x, y)$ . Oleh karena itu, sisi  $xy$  tidak dapat menjadi sisi terlemah pada  $C$ . Sehingga tidak akan terdapat lintasan kuat dari  $x$  ke  $y$ . Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Maka  $G$  adalah hutan fuzzy. ■

**Proposisi 3.2.2**

Jika  $G$  hutan fuzzy, maka sisi pada subgraf fuzzy perentang  $F$  yang merupakan hutan adalah jembatan pada  $G$ .

**Bukti :**

- Kasus 1

Andaikan  $xy$  bukan sisi di  $F$ . Berdasarkan Definisi 3.2.1, maka  $xy$  memiliki sifat

$$\rho(xy) < \tau^\infty(x, y) \quad \dots\dots\dots(*)$$

Misal  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$  maka berlaku

$$\tau^\infty(x, y) \leq \rho'^\infty(x, y) \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (\*) dan (\*\*) diperoleh,  $\rho(xy) < \tau^\infty(x, y) \leq \rho'^\infty(x, y)$ . Maka berdasarkan Teorema 3.1.1,  $xy$  bukan jembatan. ■

- Kasus 2

Andaikan  $xy$  bukan jembatan. Misal  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang didapat dengan menghapus sisi  $xy$  maka berdasarkan Teorema 3.1.1  $xy$  memiliki sifat

$$\rho'^\infty(x, y) \geq \rho(xy)$$

Katakan lintasan dari  $x$  ke  $y$  yang tidak melibatkan  $xy$  adalah  $P_{G'}$ .  $P_{G'}$  dan  $F$  membentuk sebuah siklus, sedangkan  $F$  adalah hutan. Oleh karena itu,  $F$  tidak mungkin memuat siklus, sehingga  $P_{G'}$  memuat sisi yang tidak berada di  $F$ . Katakan sisi  $uv$ . Berdasarkan Definisi 3.2.1, terdapat lintasan di  $F$  yang menghubungkan  $u$  ke  $v$  dimana  $\rho(uv) > \tau^\infty(u, v)$ . Katakan lintasan tersebut  $P_F$ . Semua sisi di  $P_F$   $> \rho(uv)$  dan  $\rho(uv) \geq \rho(xy)$ . Oleh karena itu,  $P_F$  tidak memuat  $xy$ . Jika  $P_F$  memuat  $xy$  maka  $\tau(xy) \leq \rho(xy)$ . Sehingga terdapat lintasan di  $F$  dari  $x$  ke  $y$  yang tidak memerlukan sisi  $xy$  yang kekuatannya  $> \rho(xy)$ . Hal ini mengakibatkan terdapat siklus di  $F$  dan tidak mungkin  $F$  memiliki siklus karena  $F$  adalah hutan. Oleh karena itu,  $xy$  adalah jembatan. Maka sisi di  $F$  adalah jembatan di  $G$ . ■

**3.3 Pohon dan Siklus Pada Graf Fuzzy****Definisi 3.3.1**

- 1)  $(\mu, \rho)$  adalah pohon jika dan hanya jika  $(\text{supp}(\mu), \text{supp}(\rho))$  adalah pohon.
- 2)  $(\mu, \rho)$  adalah pohon fuzzy jika dan hanya jika  $(\mu, \rho)$  mempunyai subgraf fuzzy yang merentang yaitu  $(\mu, \tau)$ , dimana  $(\mu, \tau)$  sebuah pohon sedemikian hingga  $\forall uv \in \text{supp}(\rho) \setminus \text{supp}(\tau)$ ,  $\rho(uv) < \tau^\infty(u, v)$ .

**Definisi 3.3.2**

- 1)  $(\mu, \rho)$  adalah siklus jika dan hanya jika  $(\text{supp}(\mu), \text{supp}(\rho))$  adalah siklus.
- 2)  $(\mu, \rho)$  adalah siklus fuzzy jika dan hanya jika  $(\text{supp}(\mu), \text{supp}(\rho))$  adalah siklus dan tidak terdapat dengan tunggal  $xy \in \text{supp}(\rho)$  sedemikian hingga  $\rho(xy) = \bigwedge \{ \rho(uv) \mid uv \in \text{supp}(\rho) \}$ .

**Teorema 3.3.1**

Misal  $(\mu, \rho)$  sebuah siklus. Maka  $(\mu, \rho)$  adalah siklus fuzzy jika dan hanya jika  $(\mu, \rho)$  bukan pohon fuzzy.

**Bukti :**

⇒

Andaikan  $(\mu, \rho)$  pohon fuzzy. Berdasarkan Definisi 3.3.1 (2), terdapat subgraf fuzzy rentang  $(\mu, \tau)$  dimana  $(\mu, \tau)$  adalah sebuah pohon sedemikian hingga  $\forall uv \in \text{supp}(\rho) \setminus \text{supp}(\tau)$  berlaku  $\rho(uv) < \tau^\infty(u, v)$ .

Diketahui  $(\mu, \rho)$  sebuah siklus sedangkan  $(\mu, \tau)$  sebuah pohon, maka terdapat sebuah sisi dimana sisi tersebut merupakan anggota  $\text{supp}(\rho) \setminus \text{supp}(\tau)$  katakan sisi  $x_i y_i$ .

Berdasarkan Definisi 3.3.2 (2), diperoleh  $\rho(x_i y_i) \geq \bigwedge \{ \rho(uv) \mid uv \in \text{supp}(\rho) \}$ . Hal ini kontradiksi dengan definisi pohon fuzzy yaitu  $\forall uv$

$\in \text{supp}(\rho) \setminus \text{supp}(\tau)$  berlaku  $\rho(uv) < \tau^\infty(u, v)$ .  
Maka  $(\mu, \rho)$  bukan pohon fuzzy. ■

### Teorema 3.3.2

- (1) Jika terdapat  $q \in (0, 1]$  sedemikian hingga  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  adalah pohon,  $\rho^q$  sebuah potongan- $q$ , maka  $(\mu, \rho)$  adalah pohon fuzzy.
- (2) Jika  $(\mu, \rho)$  sikel dan  $(\mu, \rho)$  pohon fuzzy, maka terdapat  $q \in (0, 1]$  sedemikian hingga  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  sebuah pohon.

### Bukti :

- (1) Misal  $(\mu, \rho)$  sebuah graf fuzzy. Misal terdapat  $q$ , dimana  $q \in (0, 1]$ .  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  dengan  $\text{supp}(\mu) = \{x \in V \mid \mu(x) > 0 \text{ dan } \rho^q = \{xy \in V \times V \mid \rho(xy) \geq q \text{ adalah sebuah pohon, maka } (\text{supp}(\mu), \rho^q) \text{ terhubung dan tidak memuat sikel.}$

Misalkan  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  adalah subgraf rentang dari  $(\mu, \rho)$ , katakan  $(\mu, \tau)$ . Maka  $\exists xy \in V \times V \setminus \rho^q$  sedemikian hingga  $\tau(xy) = 0$ . Ambil  $x_I y_I$ , dimana  $x_I y_I \in V \times V$  dan  $x_I y_I \notin \rho^q$  maka diperoleh

$$\tau^\infty(x_I y_I) \geq q \quad \dots\dots\dots(*)$$

$$q > \rho(x_I y_I) \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (\*) dan (\*\*) berlaku,

$$\tau^\infty(x_I y_I) > \rho(x_I y_I)$$

Berdasarkan Definisi 3.3.1 (2), maka  $(\mu, \rho)$  adalah pohon fuzzy. ■

- (2)  $(\mu, \rho)$  adalah sikel dan  $(\mu, \rho)$  adalah pohon fuzzy, maka berdasarkan Teorema 3.3.1  $(\mu, \rho)$  bukan sikel fuzzy. Sehingga berdasarkan Definisi 3.3.2 (2),  $\exists$  dengan tunggal  $xy \in \text{supp}(\rho) \mid \exists \rho(xy) = \bigwedge \{ \rho(uv) \mid uv \in \text{supp}(\rho) \}$ .

Pilih  $q$  sedemikian hingga,  $\rho(xy) < q$  dan  $q \leq \bigwedge \{ \rho(uv) \mid uv \in \text{supp}(\rho) \setminus \{xy\} \}$ . Didapat,  $\rho^q = \{xy \in \text{supp}(\rho) \mid \rho(xy) \geq q \}$  dan  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  adalah subgraf dari  $(\mu, \rho)$ .  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  terhubung dan tidak memuat sikel. Maka  $(\text{supp}(\mu), \rho^q)$  adalah pohon. ■

### KESIMPULAN

- 1) Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah hutan fuzzy jika
  - a. Terdapat sisi  $xy$  sedemikian hingga  $\rho(xy) < \rho'^\infty(x, y)$ , dimana  $G' = (\mu, \rho')$  adalah subgraf fuzzy yang diperoleh dengan menghapus sisi  $xy$  dari  $G$ .
  - b. Terdapat paling sedikit satu lintasan kuat diantara sebarang dua titik di  $G$ .
  - c. Sisi pada subgraf fuzzy perentang  $F$  yang merupakan hutan adalah jembatan pada  $G$ .

- 2) Graf fuzzy  $G = (\mu, \rho)$  adalah sikel fuzzy jika  $(\mu, \rho)$  bukan pohon fuzzy.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: University Press UNESA.
- [2] Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs* [third editions]. USA: Chapman & Hall/CRC.
- [3] Klir, G.J dan Folger, T.A. 1988. *Fuzzy Sets : Uncertainty and Information*. USA: Prentice Hall.
- [4] Lee, K.H. 2005. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Jerman: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [5] Mordeson, J.N dan Nair, P.S. 2000. *Fuzzy graphs and Fuzzy hypergraphs*. Jerman: Physica-Verlag Heidelberg.
- [6] Zimmermann, H.J. 1992. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. USA : Kluwer Academic Publisher